

**Gewöhnliche Differentialgleichungen**  
**Übungsserie 3**

Abgabe am **23.05.2019** vor der Vorlesung

---

**Aufgabe 1****4 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- a)  $y' = 2xy + x$  mit  $y(0) = 1$ .  
b)  $y' = \left(x^2 + \frac{\sinh(x)}{1+x^4}\right)y$  mit  $y(0) = 0$ .

**Aufgabe 2****4 Punkte**Lösen Sie für  $y(x_0) = y_0$  die folgenden Anfangswertprobleme:

- a)  $y' = 2y + x^2 e^{2x}$   
b)  $y' = y + x e^x \cos(x)$

**Aufgabe 3****4 Punkte**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Weiterhin seien  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  drei Lösungen der Differentialgleichung  $y' = g(x)y + h(x)$  auf dem Intervall  $I$ . Ihre Anfangswerte  $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)$  und  $\varphi_3(x_0)$  seien paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass der Quotient

$$\frac{\varphi_3(x) - \varphi_2(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}$$

für alle  $x \in I$  den gleichen Wert hat. Deuten Sie außerdem diese Aussage geometrisch.

**Aufgabe 4 (Bernoullische Differentialgleichung)****4 Punkte**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Als Bernoullische Differentialgleichung bezeichnet man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)y^p$$

mit  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Zeigen Sie, dass eine Bernoullische Differentialgleichung für jeden Anfangswert  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 \in I$  und  $y_0 > 0$  auf einer Umgebung von  $x_0$  eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution  $z = y^{1-p}$  um die Bernoullische Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung zu überführen.

**Zusatzaufgabe (das Ebbinghaussche Vergessensmodell) 4 Punkte**

Eine Person habe zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine bestimmte Wissenmenge auswendig gelernt. Das Ebbinghaussche Vergessensmodell ergibt sich aus den folgenden Annahmen: Es sei  $p(t)$  der Prozentteil der ursprünglichen Stoffmenge, die die Person zur Zeit  $t$  noch im Gedächtnis hat. Es gebe einen gewissen Prozentsatz  $b$  des Wissens ( $0 < b < 100$ ), der nie vergessen wird. Zur Zeit  $t$  sei die Vergessensrate  $p'(t)$  proportional zur Menge des Wissens, das noch vergessen werden kann. Formulieren Sie das zum Modell gehörende Anfangswertproblem, lösen Sie es und skizzieren Sie die Lösung.